Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente"

Pere Ivars
Àngela Buforn
Salvador Llinares

RESUMEN

En este trabajo identificamos dos características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones como aspectos relevantes en el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". Nosotros usamos datos de un entorno de aprendizaje en el programa de formación inicial de maestros en nuestra universidad para examinar el aprendizaje de los estudiantes para maestro. Las dos características identificadas son: (i) el uso de un lenguaje que relacione de manera adecuada lo general con lo específico al mirar el pensamiento matemático de los niños, y (ii) la cohesión entre los objetivos de aprendizaje para los niños generados por los estudiantes para maestro desde las inferencias realizadas sobre la comprensión matemática de los niños y las variables de tarea al proponer actividades para los niños que tengan en cuenta la progresión del aprendizaje matemático.

Palabras clave: Trayectoria de Aprendizaje. Aprendizaje del Estudiante para Profesor. Mirar Profesionalmente. Mirar Aspectos Específicos del Contenido Matemático.

Characteristics of pre-service teachers' learning of a learning trajectory about fractions to support the development of the noticing skill

ABSTRACT

In this paper, we identify two characteristics of pre-service primary teachers' learning of a learning trajectory of the fraction concept as relevant aspects in the development of the noticing students' mathematical thinking skill. We use data from a learning environment in an initial

Pere Ivars es Profesor de la Universidad de Alicante. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Facultad de Educación, Campus de Sant Vicent del Raspeig, 03080 Alicante, España. Email: pere.ivars@ua.es
Àngela Buforn es Profesora de la Universidad de Alicante. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Facultad de Educación, Campus de Sant Vicent del Raspeig, 03080 Alicante, España.
Email: angela.buforn@ua.es
Salvador Llinares es Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla (US). Catedrático de Universidad de la Universidad de Alicante (UA). Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Facultad de Educación, Campus de Sant Vicent del Raspeig, 03080 Alicante, España. Email: sllinares@ua.es
Recebido para publicação em 4/11/2016. Aceito, após revisão, em 7/11/2016.

primary teacher education program to examine pre-service primary teachers' learning of a learning trajectory about the fraction concept. The two characteristics are: (i) the relationship between the general and specific aspects in the description of students' mathematical thinking regarding the learning trajectory, and (ii) the cohesion between students' learning objectives from the pre-service primary teachers' inferences about students' reasoning and tasks' variables in pre-service teachers' instructional decisions according to the learning progressions.

Keywords: Learning Trajectories. Prospective Teacher Learning Teacher Noticing. Theme-Specific Noticing.

"MIRAR PROFESIONALMENTE" Y TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE

La manera en la que los profesores interpretan las situaciones de enseñanza de las matemáticas para decidir cómo actuar a continuación y cómo se desarrolla esta competencia es un foco de investigación en el ámbito de la educación matemática. Mirar de manera estructurada una situación de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para tomar decisiones es una competencia docente que implica no solo experiencia sino también poseer el conocimiento que es pertinente movilizar en cada situación. Esta competencia docente ha sido denominada "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y se considera una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas (MASON, 2002; SHERIN; JACOBS; PHILIPP, 2011).

Las primeras investigaciones realizadas en nuestro grupo de investigación han proporcionado información sobre la conceptualización de esta competencia docente (CALLEJO; ZAPATERA, 2016; FERNÁNDEZ; LLINARES; VALLS, 2012, 2013; IVARS; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2016a; LLINARES, 2013b; LLINARES; FERNÁNDEZ; SÁNCHEZ-MATAMOROS, 2016; PENALVA; REY; LLINARES, 2013). Estos resultados subrayan la relación entre tres mecanismos cognitivos (SÁNCHEZ-MATAMOROS; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2015):

(i) identificar/reconocer aspectos matemáticamente relevantes en una situación de enseñanza, considerando los objetivos de aprendizaje de las matemáticas,

(ii) interpretar estos aspectos dotándolos de significado, desde unas referencias de conocimiento de matemáticas y didáctica de las matemáticas (y experiencia) para

(iii) decidir cómo apoyar el aprendizaje matemático de los alumnos en el sentido de tomar decisiones de acción apoyadas en la interpretación realizada.

Esta forma de entender la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza de las matemáticas subraya tres aspectos relevantes. Primero, la relación entre los mecanismos cognitivos de identificar, interpretar y decidir en contextos institucionales específicos que definen objetivos de aprendizaje y el papel del profesor que pone de manifiesto la existencia de variables como las creencias, orientaciones y disposiciones de los profesores a actuar de una determinada manera (MASON, 2016; SCHOENFELD, 2011). Segundo, el papel que desempeña el conocimiento específico para enseñar matemáticas y el conocimiento sobre la manera en la que los estudiantes aprenden matemáticas, ya que ayuda a reconocer lo que puede ser relevante en una situación de enseñanza y dotarlo de sentido desde el conocimiento generado por las investigaciones en didáctica de las matemáticas en particular y sobre la enseñanza y aprendizaje en general (WILSON; SZTAJN; EDGINGTON; CONFREY, 2014). Finalmente, se plantea la cuestión de si esta competencia es “entrenable”, en el sentido de si es posible diseñar entornos de aprendizaje que favorezcan su desarrollo en contextos de formación inicial y de desarrollo profesional.

La gestión de estos tres aspectos en el contexto de la formación de profesores genera ámbitos de reflexión específicos para los formadores de profesores asumiéndose la hipótesis de que es posible empezar a desarrollar la competencia “mirar profesionalmente” durante la formación inicial de profesores (LLINARES, 2013a). Esta hipótesis genera algunos desafíos en el diseño de entornos de aprendizaje en los programas de formación y en la manera en la que se considera el papel desempeñado por el conocimiento para enseñar matemáticas (DREHER; KUNTZE, 2015). En particular, de qué manera deben articularse los entornos de aprendizaje y qué tipo de tareas deben plantearse en los programas de formación inicial de profesores para apoyar el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Las cuestiones que se generan sobre cómo los estudiantes para profesor aprenden a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas inciden en el papel que desempeña el conocimiento de las matemáticas y sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En relación a esta cuestión la idea de *Trayectoria de Aprendizaje* parece que puede ayudar a los estudiantes para profesor a centrarse de manera estructurada en el pensamiento matemático de los estudiantes generando así referencias para la toma de decisiones instruccionales (WILSON; MOJICA; CONFREY, 2013).

La idea de trayectoria de aprendizaje se ha revelado con potencial para ayudar a los estudiantes para profesor a estructurar la manera en la que “miran profesionalmente” las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Aunque existen diferentes interpretaciones de la idea de trayectoria de aprendizaje (BATTISTA, 2011; EMPSON, 2011), una característica común es que proporciona un modelo de la progresión en el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares (niveles de progresión en el pensamiento matemático cada vez más sofisticados) vinculados a un objetivo de aprendizaje generado desde los resultados de investigaciones previas y un conjunto de posibles actividades que pueden apoyar dicha progresión del aprendizaje. La descripción de los posibles caminos que el aprendizaje de un concepto puede seguir tiene un carácter hipotético en relación a un grupo específico de niños. Sin embargo, la información sobre una trayectoria de aprendizaje proporciona referencias que pueden ayudar a los estudiantes para profesor a mirar de una manera estructurada el pensamiento matemático de los estudiantes. En este sentido, una trayectoria de aprendizaje de un concepto puede referirse al intervalo temporal dado por una lección o sucesión de lecciones en un determinado nivel o un periodo más amplio de tiempo. La cuestión que se plantea desde la formación de profesores es que los resultados de las investigaciones sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos deben ser transformados, dentro de la referencia de una trayectoria de aprendizaje, en contenido del programa de formación de profesores. En este proceso de transformación, los formadores de profesores deben decidir el nivel de concreción y la manera en la que son presentados a los estudiantes para profesor los resultados de la investigación para que sean útiles en el desarrollo de una mirada estructurada sobre las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (competencia "mirar profesionalmente").

Los resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática sobre cómo los estudiantes aprenden conceptos específicos aportan información sobre dificultades y errores, pero también sobre niveles de pensamiento cada vez más sofisticados identificando puntos de referencia en los procesos de aprendizaje de los estudiantes que permiten caracterizar los aprendizajes en las aulas. Sin embargo, esta información debe ser presentada a los estudiantes para profesor de manera que pueda ser considerada útil para identificar aspectos relevantes en las estrategias de los estudiantes. Así, algunos resultados de las investigaciones sobre cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre una trayectoria de aprendizaje de un concepto matemático sugieren la importancia de tener en cuenta las características del entorno de aprendizaje en el cual se presenta la información relativa a la trayectoria de aprendizaje y la información que constituye dicha trayectoria (es decir, el tipo de tarea presentada a los estudiantes para profesor) (EDGINGTON; WILSON, SZTAJN; WEBB, 2016). Desde esta perspectiva, se conjetura que las trayectorias de aprendizaje, convertidas en un instrumento conceptual para los estudiantes para profesor, favorecerán la toma de decisiones instruccionales de los estudiantes para profesor al permitirles reconocer diferentes niveles de progresión en el aprendizaje matemático de sus estudiantes. De esta manera, el conocimiento de una trayectoria de aprendizaje puede mejorar la competencia del estudiante para profesor en cómo definir objetivos de aprendizaje, justificar la planificación y anticipar posibles respuestas de sus alumnos, así como estar mejor informado para gestionar las discusiones en el aula, y valorar el aprendizaje de sus alumnos.

Las investigaciones sobre la manera en la que los estudiantes para profesor aprenden a usar una trayectoria de aprendizaje para desarrollar una mirada estructurada sobre la enseñanza de las matemáticas han generado recientemente una agenda de investigación (EDGINGTON et al., 2016; WILSON et al., 2013; WILSON et al., 2014). El trabajo presentado aquí pretende contribuir a la discusión sobre estos temas describiendo algunas características de la manera en la que los estudiantes para maestro aprenden una trayectoria de aprendizaje como un medio para apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

DISEÑO DE UN ENTORNO DE APRENDIZAJE EN FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS PARA APRENDER UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Los estudiantes para maestro deberían tener un conocimiento sólido sobre el esquema fraccionario y sobre el razonamiento proporcional (BUFORN; FERNÁNDEZ,

2014) y cómo este empieza a desarrollarse en los primeros años de la educación primaria. De esta manera, un entorno de aprendizaje en nuestro programa de formación inicial de maestros se centra en potenciar el aprendizaje de los estudiantes para maestro de las características de la progresión en la comprensión del esquema fraccionario en los niños de 6 a 12 años. En esta sección primero describiremos cómo adaptamos una trayectoria de aprendizaje para las fracciones en los primeros años de la educación primaria como contenido del programa de formación. A continuación, detallaremos los principios rectores de la manera en la que entendemos el aprendizaje del estudiante para maestro que subyacen a las decisiones para el diseño e implementación de las tareas del entorno de aprendizaje. Finalmente, describiremos una de las tareas usadas en dicho entorno, cuya resolución nos permitirá presentar algunas características de la forma en la que los estudiantes para maestro aprenden a usar dicha trayectoria de aprendizaje, para generar información del pensamiento matemático de los niños sobre la que justificar sus decisiones de enseñanza.

Adaptando una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones en los primeros años de la educación primaria

Se ha adaptado una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones en la educación primaria desde la propuesta de Battista (2012) para el diseño de un entorno de aprendizaje en el programa de formación inicial de maestros (IVARS; FERNANDEZ; LLINARES, 2016b). La trayectoria de aprendizaje de las fracciones construida en este entorno de aprendizaje enfatiza algunos puntos ("bechmarks/milestones") como referencias para la construcción del significado de las fracciones por parte de los estudiantes de educación primaria: dividir en partes congruentes un todo y comprender la relación que existe entre una de las partes y el todo (simbolizando esta relación como la fracción a/b); iterar una parte para construir el todo (permitiendo generar fracciones impropias); comprender las fracciones no unitarias (por ejemplo 2/3), las fracciones impropias (por ejemplo 4/3) y diferentes formas de simbolizar la relación parte-todo (4/3 = 1 + 1/3); comprender que una misma cantidad puede ser nombrada de diferente manera, es decir, comprender que una parte puede ser dividida en otras partes y por tanto, permite renombrar cada parte según la nueva fracción unitaria. Finalmente, la manera en la que estos elementos matemáticos son representados con magnitudes continuas, discretas o usando la recta numérica permite definir niveles de sofisticación en el razonamiento de los estudiantes sobre las fracciones. La adaptación realizada definía tres niveles de sofisticación en el razonamiento de los estudiantes para construir el significado de fracción y otros tres relativos a la aritmética de las fracciones. La Tabla 1 presenta los seis niveles considerados en la trayectoria de aprendizaje, siendo los tres primeros los usados para desarrollar las tareas prácticas que los estudiantes para maestro realizaron en este trabajo.

Principios del aprendizaje del estudiante para maestro sobre los que se articula el diseño del entorno de aprendizaje

En el diseño del entorno de aprendizaje se asume que los estudiantes para maestro aumentarán su capacidad de mirar de manera estructurada los registros de la práctica en la medida en la que sean capaces de vincular los elementos matemáticos en las estrategias usadas por los niños para resolver actividades sobre fracciones (lo empírico), con la trayectoria de aprendizaje. Es decir, el aprendizaje de los estudiantes para maestro se evidenciaría en la medida en la que se establecieran relaciones entre los elementos matemáticos del problema y los niveles de desarrollo dados por la trayectoria de aprendizaje para justificar una decisión de enseñanza (proponer una nueva actividad, o modificar la actividad presente en ese momento) para apoyar la progresión en el aprendizaje de las fracciones en los niños. La hipótesis es que la trayectoria de aprendizaje podría desempeñar el papel de "andamio cognitivo" para el desarrollo de una mirada profesional más estructurada del estudiante para maestro. Es decir, que el conocimiento de una trayectoria de aprendizaje puede determinar lo que los estudiantes para maestro "ven" y cómo lo ven. Además, la trayectoria de aprendizaje puede ser usada por los estudiantes para maestro como un esquema para justificar la toma de decisiones y/o instrucciones dirigidas a apoyar la progresión del aprendizaje de las fracciones por los niños.

TABLA 1 – Niveles de sofisticación del razonamiento de los estudiantes en la trayectoria de aprendizaje propuesta en el entorno de aprendizaje.

<table>
<tr><td>1</td><td>No reconocen que las partes deben ser congruentes</td><td rowspan="3">Del significado intuitivo de dividir en partes congruentes a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones</td></tr>
<tr><td>2</td><td>En contexto continuo reconocen que las partes deben ser congruentes (reconocen la idea de fracción como relación parte-todo) y consideran la fracción unitaria como unidad iterativa</td></tr>
<tr><td>3</td><td>En contextos discretos reconocen la fracción como relación parte-todo. Consideran una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como unidad iterativa (una parte puede estar dividida en otras partes y consideran un grupo de partes como una parte).
Reconocen las fracciones representadas en diferentes modos de representaciones</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Pueden operar y resolver problemas aritméticos simples con ayuda de guías/apoyo</td><td rowspan="3">Construcción del significado de los procedimientos de cálculo con las fracciones</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Pueden operar y resolver problemas aritméticos simbólicamente, identificando patrones. Pueden justificar gráficamente lo que realizan, pero solo en situaciones sencillas.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Comprender por qué funcionan los algoritmos de cálculo con las fracciones, y pueden usar dibujos para explicar su funcionamiento</td></tr>
</table>

Fuente: Datos de la investigación.

Desde esta perspectiva, se tiene en cuenta la transición en el modo de mirar de manera estructurada las situaciones de enseñanza, desde realizar una descripción lo más objetiva posible de una situación a ofrecer una interpretación basada en la experiencia previa o un conocimiento disciplinar (MASON, 1998, 2002, 2011; WILSON; LEE; HOLLEBRANDS, 2011). El proceso de *discernir los detalles* de la situación (por ejemplo, los elementos matemáticos de la tarea y cómo son usados por los estudiantes para resolverla) permite describir la tarea y las estrategias seguidas por los estudiantes lo que permite llegar a ser conscientes de las diferencias y semejanzas entre las estrategias de varios estudiantes *reconociendo relaciones* con los niveles de progresión en el aprendizaje. La posibilidad de reconocer diferencias y semejanzas en las estrategias usadas por los estudiantes se apoya en la posibilidad de realizar comparaciones entre ellas. Este hecho viene reflejado en el diseño de los módulos de enseñanza proporcionando a los estudiantes para maestro respuestas de varios estudiantes con diferentes características. En el contexto de la formación inicial de maestros el continuo desde la descripción objetiva hasta la interpretación se apoya en la instrumentalización de una trayectoria de aprendizaje (el conocimiento disciplinar a ser aprendido en el programa de formación de maestros) para realizar la interpretación. Esta instrumentalización de la trayectoria de aprendizaje es el objetivo de aprendizaje del entorno de aprendizaje diseñado.

La tarea

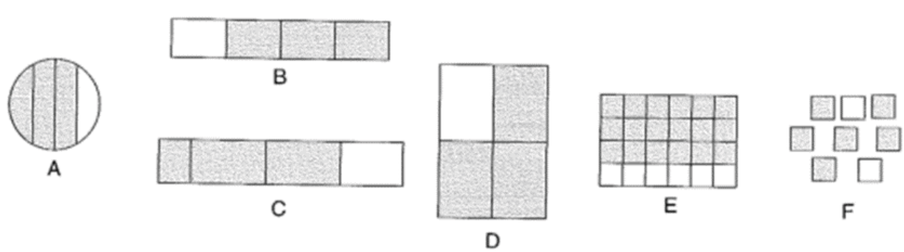
El entorno de aprendizaje de las fracciones estaba organizado a través de una secuencia de tres tareas. Las tareas están formadas por registros de la práctica (respuestas de estudiantes de educación primaria a actividades sobre las fracciones) que reflejan diferencias en los niveles de sofisticación del razonamiento de los niños sobre las fracciones. Para guiar el proceso de "mirar de manera estructurada", que se quiere generar en los estudiantes para maestro, incluimos cuatro preguntas-guía ("prompts") dirigidas a ayudar a los estudiantes para maestro a discernir detalles relevantes tanto en la actividad como en las respuestas de los estudiantes de manera que se pudiera crear el contexto para establecer relaciones en este entorno particular (Tabla 2). La idea que subyace a esta forma de diseñar las tareas para los estudiantes para maestro procede de las hipótesis sobre las que se conjetura el proceso de aprendizaje de los estudiantes para maestro descrito anteriormente (MASON, 1998, 2002, 2011; WILSON et al., 2011). Es decir, en la medida en la que los estudiantes para maestro sean capaces de *reconocer relaciones* entre los elementos matemáticos de la actividad y las estrategias evidenciadas por los niños al responder en diferentes situaciones, estarán en mejor condición de llegar a ser conscientes de estas relaciones como ejemplos particulares de propiedades que se pueden dar en otras situaciones que se ejemplifican en la trayectoria de aprendizaje instrumentalizada (*percibir propiedades*). El uso de la trayectoria de aprendizaje para justificar las decisiones de enseñanza puede ser evidencia de que se está razonando sobre las progresiones en el aprendizaje de los estudiantes.

A continuación, describimos una de las tareas utilizadas en este entorno de aprendizaje (IVARS et al., 2016) que nos permitirá ejemplificar posteriormente algunas características de la manera en la que parece están aprendiendo los estudiantes para maestro la trayectoria de aprendizaje de las fracciones y cómo estas características parecen articular el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente”. La tarea (Tabla 2) está formada por las respuestas de tres parejas de niños de educación primaria (8-9 años) a una actividad de reconocer/identificar fracciones (reconocer la fracción ¾). Las tres respuestas reflejan características diferentes de la comprensión de la idea de fracción según la trayectoria de aprendizaje definida. Además, se proporcionó a los estudiantes para maestro cuatro preguntas-guía para ayudarles en el análisis de estos registros de la práctica.

La resolución de la actividad “*¿qué figura de las siguientes representa ¾?*” exige a los niños de educación primaria usar de manera adecuada el elemento matemático reconocer/identificar fracciones propias (f<1; f= 3/4) (interpretación de la fracción como la relación entre una parte y el todo) en varias representaciones de la unidad (un círculo, rectángulo, y fichas). En la actividad propuesta, las partes no son congruentes en dos representaciones (A y C), pero sí en B y D. La inclusión de estas representaciones en la actividad tiene como objetivo determinar la comprensión de los niños de que las partes deben ser congruentes. La inclusión de las representaciones E y F, dan la posibilidad de que los niños movilicen la idea de que una parte puede ser dividida en otras partes lo que significa considerar un grupo de partes como una parte. La Tabla 3 recoge las características de las tres respuestas de los niños que deben ser reconocidas por los estudiantes para maestro y usadas para generar una interpretación de la comprensión de los niños usando la trayectoria de aprendizaje como referente.

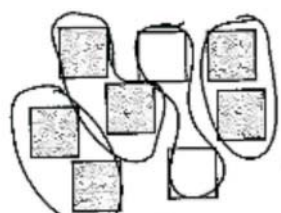
TABLA 2 – Tarea propuesta a los estudiantes para maestro.

Actividad: ¿Qué figuras de las siguientes representa ¾?



Fuente: Datos de la investigación.

En la discusión en la clase entera de las respuestas generadas por sus alumnos se comparten las tres siguientes respuestas:

Respuesta de Víctor y Xavi	Respuesta de Joan y Tere	Respuesta de Félix y Álvaro
Júlia: ¿Cuál es vuestra respuesta? *Víctor: Mmmm, bueno nosotros creemos que la figura A, B C y D representan tres-cuartos.* *Júlia: Xavi, ¿tú estás de acuerdo con Víctor?* *Xavi: Sí, creo que sí porque A, B, C y D son 3 partes de 4 sombreadas, es decir tres-cuartos* *Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo?*	*Joan: Nosotros no, seño (Joan forma equipo con Tere)* *Júlia: ¿Qué pensáis vosotros?* *Tere: Nosotros creemos que la figura B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres sombreadas. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales…* *Júlia: ¿Y la figura E? ¿Qué pensáis de la figura E?* *Joan: La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.* *Tere: Eso es, no son tres-cuartos.* *Júlia: Entonces la F…* *Joan y Tere: …. Tampoco, eso son 6 cuadrados sombreados*	*Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo con la respuesta de Joan y Tere? ¿Hay alguien que lo haya pensado de manera diferente? ¿Félix y Álvaro qué han hecho?* *Félix: Bueno… sí. La A, B C y D son como dicen ellos (Joan y Tere), lo que pasa es que la E lo hemos hecho de otra manera…* *Júlia: ¿Cómo? Explícanoslo* *Álvaro: Bueno… mmmm pues así, mira. Si te fijas cada línea tiene 6 cuadritos, es decir son todas iguales, y como hay 3 líneas sombreadas de las 4 pues entonces son tres cuartos.* *Además… para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los cuadros de 2 en 2), obtienes 4 grupos de 2 cuadros, y de esos 4 grupos, 1,2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo sombreado) están sombreados, que son tres grupos sombreados de los cuatro que tenemos*  F

Fuente: Datos de la investigación.

Preguntas guía:

C1 - Describe **la tarea** en función del objetivo de aprendizaje: ¿cuáles son los elementos matemáticos que el resolutor debe usar para resolverlo?

C2 - Describe **cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea** identificando. Cómo han utilizado los *elementos matemáticos* implicados y las dificultades que han tenido con ellos

C3 - ¿En qué **nivel de la trayectoria de aprendizaje** situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.

C4 - Teniendo en cuenta el nivel en el que has situado a cada pareja. Define **un objetivo de aprendizaje y propón una actividad** (o modifica la actividad inicialmente propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la trayectoria de aprendizaje

TABLA 3 – Características de las tres respuestas de los niños.

	Actividad: Reconocer ¾	**Víctor y Xavi**	**Joan y Tere**	**Félix y Álvaro**
Elementos matemáticos cuya comprensión articula las Trayectorias de Aprendizaje de los niños	Las partes deben ser congruentes.	NO	SI	SI
	Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.	NO	NO	SI

Fuente: Datos de la investigación.

APRENDIENDO SOBRE UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE

Las respuestas de los estudiantes para maestro a esta tarea muestran algunas características de la manera en la que están aprendiendo la trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones (Tabla 1) y la manera en la que los elementos que constituyen la trayectoria de aprendizaje les permiten ir articulando una mirara más estructurada para inferir información sobre la comprensión de los estudiantes para proponer nuevas actividades. En esta sección mostraremos dos características de este proceso para subrayar el proceso de aprendizaje de los estudiantes para maestro y las dificultades que encuentran en discernir los detalles relevantes en las respuestas de los estudiantes. Estas características se generan desde las evidencias que muestran en qué medida los estudiantes para maestro son conscientes de la semejanzas y diferencias en la manera de resolver la actividad los niños para inferir información sobre su pensamiento matemático para proponer nuevas actividades instruccionales.

Las dos características identificadas son: (i) el uso de un lenguaje que relacione de manera adecuada lo general con lo específico al mirar el pensamiento matemático de los niños, y (ii) la cohesión entre los objetivos de aprendizaje diseñados para los niños y las variables de tarea al proponer actividades que tengan en cuenta la progresión del aprendizaje.

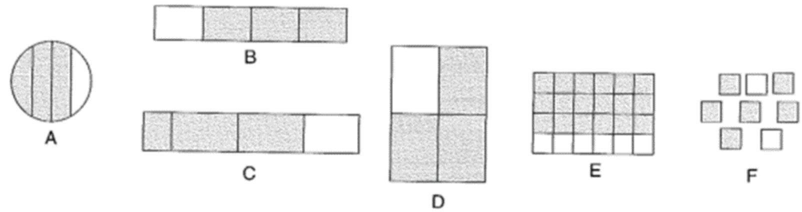
Discernir y comparar detalles

Mirar las respuestas de los estudiantes tomando como referencia la trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones (Tabla 1) no resulta fácil a los estudiantes para maestro. El uso de la trayectoria de aprendizaje permitió a los estudiantes para maestro diferenciar el razonamiento de los estudiantes centrándose en algunos elementos matemáticos frente a otros, sin embargo, la manera en la que empezaban a usar la trayectoria de aprendizaje para discernir lo que podía ser relevante no fue uniforme. La relación entre lo general y lo específico en el discurso generado muestra una característica de la instrumentalización de la información procedente de la trayectoria de aprendizaje. La instrumentalización es vista, en este contexto, como el aprendizaje de la trayectoria de aprendizaje y su uso para discernir detalles de la situación, discriminando unos aspectos frente a otros. Por ejemplo, en la Tabla 4 aparecen las respuestas de dos estudiantes para maestro relativas a la manera en la que describían las estrategias usadas por la segunda pareja de niños (Joan y Tere) que se les había proporcionado y sus inferencias sobre la comprensión. El uso de la trayectoria de aprendizaje permitió a estos estudiantes para maestro reconocer diferencias en la manera en la que los niños resolvían las actividades. Por ejemplo, el uso del elemento matemático "las partes debes ser congruentes" como referente para mirar las respuestas de los niños (Joan y Tere) les permitía discernir los detalles "Joan y Tere sí integran [comprenden] el primer objetivo de la tarea y dicen que B y D son ¾, pero A y C no, porque no tienen partes iguales" (E88-P1). De la misma manera, el uso del elemento "Una parte puede estar dividida en otras partes", les permite centrar su atención en la manera en la que los niños resuelven la actividad (determinar si las figuras E y F representan ¾).

En este sentido, la capacidad de discernir los detalles usando las características de la trayectoria de aprendizaje como un andamio cognitivo permite superar planteamientos dicotómicos de "correcto" o incorrecto" de manera global. Así, las descripciones de las estrategias usadas por los niños y las inferencias sobre su comprensión estaban articuladas por los referentes procedentes de la trayectoria de aprendizaje lo que permite matizar planteamientos más globales. Sin embargo, hay diferencias en la manera en la que los estudiantes para maestro describen las estrategias de los niños en la actividad planteada generando un discurso más específico (E88-P1) o más general (E78-P1) que tiene implicaciones con posteridad.

TABLA 4 – Respuestas de estudiantes para maestro a las preguntas guía 2 y 3.

Actividad: ¿Qué figuras de las siguientes representa ¾?



[respuesta de Joan y Tere]

Joan: Nosotros no, seño (Joan forma equipo con Tere)

Júlia: ¿Qué pensáis vosotros?

Tere: Nosotros creemos que la figura B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres sombreadas. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales…

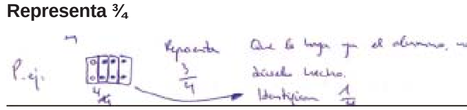
Júlia: ¿Y la figura E? ¿Qué pensáis de la figura E?

Joan: La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.

Tere: Eso es, no son tres-cuartos.

Júlia: Entonces la F…

Joan y Tere: …. Tampoco, eso son 6 cuadrados sombreados

E78-P1	**E88-P1**
- Identifican que las partes deben ser congruentes, y que las partes en las que se divide un todo pueden tener diferente forma. La dificultad que presentan es que [no] reconocen que una parte puede estar dividida en otro grupo de partes. Pareja 2- nivel 2	- Joan y Tere sí integran el primer objetivo de la tarea y dicen que B y D son ¾, pero A y C no, porque no tienen partes iguales. No obstante , no interiorizan el segundo objetivo que se rige por considerar que un grupo de partes puede constituir otras partes Joan y Tere están en el nivel 2 ya que reconocen que las fracciones en contexto continuo (A, B, C, D) pero no en el discreto (E, F). En E y F tratan las partes sombreadas, e incluso diciendo que son 18/24 y 6/8. No ven la relación con ¾
Pareja 2: Joan y Tere **Objetivo**: reconocer un grupo de partes como una parte. **Actividad**: plantear problemas con fracciones impropias. Así se darán cuenta que necesitan tomar un grupo de partes para obtener la fracción pedida. **Maestro**: Seguirá con su papel, buscando la justificación por parte de los alumnos	Pareja 2: Joan y Tere. Nivel 2 **Objetivo de aprendizaje**: - Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes y considerarlas como unidad iterativa. **Actividad** - Con la ayuda de fichas (contexto discreto) se irán representando fracciones como ¾ variando en función de la consecución del objetivo - Que lo haga ya el alumno, no dándoselo hecho **Representa ¾** 

Fuente: Datos de la investigación.

La *relación entre lo general y lo específico* en el discurso de los estudiantes para maestro puesta de manifiesto en estos protocolos debe ser entendida como una interacción dialéctica entre lo teórico y los aspectos empíricos en este contexto de aprendizaje. A los estudiantes para maestro se les proporcionaron evidencias de la práctica (lo empírico), información teórica en forma de elementos matemáticos que configuran el esquema fraccionario e información sobre una trayectoria de aprendizaje para dar cuenta de las progresiones en el aprendizaje de las fracciones. Las cuestiones plantadas (los "prompts") "*Describe como han resuelto cada pareja de estudiantes la tarea*" y "*¿en qué nivel de la trayectoria de aprendizaje los sitúas?*" constituyen sus referencias para relacionar lo empírico con lo teórico a través de los mecanismos cognitivos de discernir detalles (para describir las respuestas de los niños) y reconocer relaciones al ser conscientes de las semejanzas y diferencias entre las respuesta de los niños, permitiendo hacer comparaciones en el trabajo de los estudiantes – las evidencias- con lo que se indica en la teoría.

De todas maneras, las características del discurso generado, visto a través del continuo dado por la relación entre *lo general y lo específico*, se manifiestan en estos protocolos por la manera en la que los estudiantes para maestro vinculan las evidencias que constituyen las respuestas de los niños a las interpretaciones de los niveles de desarrollo de la trayectoria de aprendizaje. Aunque aparentemente las dos respuestas (E78-P1 y E88-P1) hacen uso de los elementos característicos del esquema de fracción adecuadamente, la manera diferente en la que estas dos respuestas vinculan el uso de los elementos matemáticos con las evidencias dadas por las respuestas de los niños, muestra una manera de gestionar lo general con lo especifico definiendo una característica del aprendizaje reflejado en el discurso de los estudiantes para maestro. Ver la respuesta de los estudiantes para maestro en relación a cómo describen las estrategias de los niños y las asocian a niveles de comprensión, desde la perspectiva del continuo general-específico, intenta superar la mirada hacia el discurso de los estudiantes para maestro en el sentido de correcto-incorrecto. En este caso el foco está colocado en determinar en qué medida el grado de concreción dado en la respuesta de los estudiantes para maestro permite asumir que pueden ser conscientes de estas relaciones particulares como ejemplos de propiedades generales que pueden darse en otras situaciones que se ha denominado *percibir propiedades* (la característica del aprendizaje de los niños que se ejemplifica de manera particular con las respuestas de los niños dadas en esta tarea). Es decir, la transición entre "*reconocer relaciones*" y "*percibir propiedades*" en el desarrollo de una mirada estructurada de las situaciones de enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, desde la perspectiva de los principios del aprendizaje de los estudiantes para maestro que rigen el diseño de este entorno de aprendizaje, ver las respuestas de los estudiantes para maestro desde el continuo *específico-general* permite generar hipótesis sobre cómo se genera el aprendizaje de la trayectoria de aprendizaje. Es decir, considerando el paso desde *reconocer relaciones* siendo consciente de las diferencias y semejanzas entre las evidencias de la práctica analizadas y llegar a ser consciente de estas relaciones particulares como ejemplos de propiedades generales que se puedan dar en otras situaciones *(percibir propiedades*).

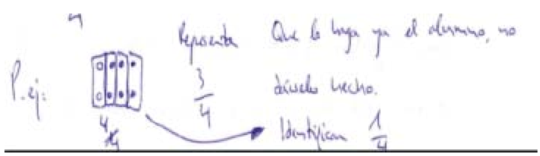
Inferir aspectos de la comprensión y proponer nuevas actividades

En el proceso de aprendizaje de una trayectoria de aprendizaje, se puso de manifiesto la diferencia entre inferir niveles de comprensión de los niños y la propuesta de nuevas actividades para apoyar la progresión en el aprendizaje, previa definición de un objetivo de aprendizaje. Una evidencia de este hecho se refleja en las dos respuestas de los estudiantes para maestro (Tabla 4). En este caso, la respuesta de E78-P1 define un objetivo de aprendizaje vinculado a lo que había identificado en la respuesta de los niños, pero propone una actividad sin relación o unión clara entre el objetivo y las variables de tarea (no hay evidencias de cohesión entre las características de la actividad y el objetivo de aprendizaje pretendido).

> ***Objetivo**: reconocer un grupo de partes como una parte.*
>
> ***Actividad**: plantear problemas con fracciones impropias. Así se darán cuenta que necesitan tomar un grupo de partes para obtener la fracción pedida.*
>
> *Maestro: Seguirá con su papel, buscando la justificación por parte de los alumnos*
>
> *(E78-P1)*

Este tipo de respuestas pone de manifiesto la diferencia que existe entre generar actividades considerando las respuestas de los niños, y vincular la respuesta de los niños a una determinada característica de la trayectoria de aprendizaje. En la respuesta dada por E78-P1 se hace mención a que los niños deben resolver actividades en las que tengan que considerar una parte formada por otras partes (que es la redacción dada a su objetivo de aprendizaje) otorgando al maestro un papel genérico en cuanto al objetivo de aprendizaje propuesto. En esta respuesta no se propone una actividad, sino que se parafrasea el objetivo de aprendizaje, lo que pone de manifiesto la dificultad en generar una respuesta adecuada.

Mientras por otra parte en la respuesta de E88-P1, que identificó el mismo objetivo de aprendizaje, se propone una actividad con un vínculo más claro con lo que se pretende que el niño consiga.

> **Objetivo**
>
> *Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes y considerarlas como unidad iterativa*
>
> **Actividad**
>
> *Con la ayuda de fichas (contexto discreto) se irán representando fracciones como ¾ variando en función de la consecución del objetivo*
>
> *Que lo haga ya el alumno , no dándoselo hecho*
>
> **Representa ¾**
>
> 
>

En esta respuesta se plantea una actividad en un contexto discreto mediante el uso de fichas que permite generar la posibilidad de presentar la fracción ¾ desde diferentes representaciones. Sin embargo, un aspecto clave en esta situación que no es mencionado es que se debe asumir que la relación entre la parte y el todo ha sido construida por los niños para que el uso de diferentes unidades (4 fichas, 8 fichas, 12 fichas…) en la representación de la fracción 3/4 no genere dificultades. En este caso, la constitución del significado de la fracción ¾ está vinculado a la relación *"3 partes-de-4"* en las que está constituido el todo (es decir la fracción como una relación parte-todo). Esto forma parte de la característica que define el nivel tres de desarrollo de la comprensión de las fracciones dado en la trayectoria de aprendizaje que se ha proporcionado como referencia.

En contextos discretos reconocen la fracción como relación parte-todo. *Consideran una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como unidad iterativa (una parte puede estar dividida en otras partes y consideran un grupo de partes como una parte)* *Reconocen las fracciones representadas en diferentes modos de representaciones*

De todas maneras, la característica de esta actividad es la consistencia clara entre las variables de la actividad (usar fichas para formar todos de diferente tamaño, lo que pone de manifiesto claramente la posibilidad de generar partes formadas por otras partes) y el objetivo de aprendizaje derivado del uso de la trayectoria de aprendizaje cuando se determinan las semejanzas y diferencias entre el uso de los elementos matemáticos identificados. La cohesión/coherencia entre el objetivo y las variables de tarea en este contexto debe ser entendida como evidencia de una mayor conexión entre el objetivo de aprendizaje y las características de la tarea propuesta.

DISCUSIÓN

El diseño de las tareas prácticas (Tabla 2) en el entorno de aprendizaje para los estudiantes para maestro, en las que se presentaban respuestas de alumnos con diferentes características, permitió a los estudiantes para maestro empezar a discernir detalles en las respuestas de los niños y a compararlas haciendo operativa la idea de progresión en el aprendizaje de las fracciones. En este proceso de instrumentalización de la trayectoria de aprendizaje de las fracciones pudimos identificar dos características. Por una parte, el uso del lenguaje para generar un discurso profesional cada vez más adecuado vinculado al continuo *general-específico*, y la relación no directa entre inferir niveles de comprensión de los niños a partir de sus respuestas y la toma de decisiones instruccionales, centradas en proponer actividades que apoyen la progresión del aprendizaje de los niños, vista a través de *la cohesión entre el objetivo de aprendizaje y las variables de tarea* consideradas.

El uso del lenguaje para describir los detalles que se reconocen: relación entre lo general y lo específico

Los elementos de la trayectoria de aprendizaje, como por ejemplo, la comprensión de que las partes deben ser congruentes, y que una parte puede estar dividida en otras partes (considerando un grupo de partes como una parte) permitieron a los estudiantes para maestro poseer unas referencias que determinaban qué mirar en las respuestas de los niños. Sin embargo, el uso del lenguaje no fue uniforme por parte de los estudiantes para maestro haciendo emerger la relación entre lo general y lo específico como una característica de la instrumentalización de la trayectoria de aprendizaje. Lo que puso de manifiesto que generar un discurso profesional coherente y adecuado resulta difícil. Sin embargo, parece que la información proporcionada por la trayectoria de aprendizaje de las fracciones permitió a los estudiantes para maestro relacionar las respuestas de los niños (las evidencias empíricas) con sus inferencias generadas a partir de la trayectoria de aprendizaje, es decir, inferencias teóricas sobre el desarrollo de la comprensión de las fracciones en los niños. En este sentido, la relación entre lo empírico y lo teórico que se pone de manifiesto en el aprendizaje de la trayectoria de aprendizaje se manifiesta en las diferentes respuestas de los estudiantes para maestro a través de la relación entre lo general y lo específico.

La relación entre reconocer niveles de comprensión y proponer actividades para apoyar el aprendizaje

La manera en la que los maestros pueden responder a las estrategias de los niños muestra la dificultad de esta actividad (SON, 2016; LLINARES et al., 2016). El análisis de la manera en la que los estudiantes para maestro están aprendiendo a usar una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones, para generar objetivos de aprendizaje y proponer actividades que apoyen la progresión en el aprendizaje de los niños, ha puesto de manifiesto que la cohesión entre estos aspectos debe ser también un producto del aprendizaje. Este hecho viene derivado de la dificultad que tienen algunos estudiantes para maestro para generar actividades de enseñanza que muestren la relación entre los objetivos de aprendizaje y las variables de la actividad.

Es posible que esta característica del aprendizaje de los estudiantes para maestro, derivada de la manera en la que se instrumentaliza la trayectoria de aprendizaje, implique una relación entre el aprendizaje y la enseñanza que debe ser articulada en los programas de formación de maestros. La articulación de esta relación debería definir objetivos explícitos en la formación de los maestros para centrarse en generar cohesión entre los niveles de comprensión identificados en los estudiantes (que definen los objetivos de aprendizaje) y las variables de tarea que se proponen. En este sentido la cohesión entre niveles de comprensión y variables de tarea se debe apoyar en el uso explícito de la idea de progresión en el aprendizaje de los elementos matemáticos y sus relaciones que constituyen el entramado conceptual de la idea matemática que se quiere que se aprenda.

El aprendizaje de una trayectoria de aprendizaje en el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente"

Nuestros resultados indican que el aprendizaje por parte de los estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje de las fracciones les proporciona una estructura para discernir las diferencias entre las respuestas de los niños y reconocer semejanzas y diferencias entre los detalles discernidos. En otros contextos este proceso se vincula a la creación por parte de los estudiantes para maestro de modelos del pensamiento matemático de los niños (WILSON et al., 2013). El proceso de ir creando paulatinamente esta estructura pasa por gestionar la relación entre lo general y lo específico al hablar de las estrategias de los niños y al hacer inferencias sobre su comprensión. En este sentido, la instrumentalización de una trayectoria de aprendizaje puede ser entendida como la generación de un instrumento conceptual que permite organizar y relacionar los elementos matemáticos identificados en las respuestas de los niños (lo empírico) para coordinarlos con las referencias teóricas sobre la progresión de la comprensión (lo teórico).

El conocimiento de una trayectoria de aprendizaje por parte de los estudiantes para maestro es el primer paso para llegar a ser conscientes de las diferencias o semejanzas en las respuestas de los niños y como paso previo a usar las características del pensamiento matemático de los niños para apoyar las propuestas instruccionales. Sin embargo, no existe una relación directa entre generar objetivos de aprendizaje derivados del análisis de las respuestas de los niños y proponer actividades adecuadas para ese fin. Este hecho es el que pone de manifiesto la necesidad de centrar la atención en el aprendizaje de los estudiantes para maestro en cohesionar los objetivos de aprendizaje propuestos con las variables de tareas consideradas.

En estos momentos hemos generado dos características del aprendizaje de los estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje vista como un instrumento conceptual que apoya el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente". Estas dos características, el continuo *general-específico* en el discurso que vincula la evidencia práctica con la teoría, y el *grado de cohesión* entre los objetivos de aprendizaje derivados de las inferencias sobre la comprensión de los niños, no tienen por qué estar relacionadas. Determinar en qué medida pueden estar relacionadas, o si existe algún vínculo de causalidad entre ellas son cuestiones que deben ser contestadas por investigaciones futuras.

Finalmente, desde estas referencias podemos indicar que, el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente se apoya en dos aspectos. En primer lugar, en la instrumentalización de una trayectoria de aprendizaje para algún concepto matemático, que pasa por gestionar la interacción entre lo general y lo especifico como una manifestación de la relación entre lo empírico y lo teórico relativo al pensamiento matemático de los niños. En segundo lugar, la cohesión entre la definición de objetivos de aprendizaje y las variables de tarea en las actividades que se pueden proponer para apoyar la progresión en el aprendizaje de los estudiantes. Las investigaciones en este campo centradas en estos aspectos pueden aportar información relevante que permita diseñar o revisar los entornos de aprendizaje usados en la formación inicial de los maestros.

RECONOCIMIENTO

Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto de I+D+i, EDU2014-54526-R, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España.

REFERENCIAS

BATTISTA, M. Conceptualizations and Issues Related to learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast,* Montana, v.8, n.3, p.507-570, 2011.

BATTISTA, M. *Cognition-Based Assessment & Teaching of Fractions*. Building on Students' Reasoning. Porstmouth, NH: Heinemann, 2012.

BUFORN, A.; FERNÁNDEZ, C. Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA*, Rio Claro, v.28, n.48, p.21-41, 2014.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, New York, DOI 10.1007/s10857-016-9343-1, 2016.

DREHER, A.; KUNTZE, S. Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representation in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, New York, v.88, p.89-114, 2015.

EDGINGTON, C.; WILSON, P. H.; SZTAJN, P.; WEBB, J. Translating Learning Trajectories into Useable Tools for Teachers. *Mathematics Teacher Educator,* Reston, v.5, n.1, p.65-80, 2016.

EMPSON, S. On the Idea of Learning Trajectories: Promises and Pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, Montana, v.8, n.3, p.571-796, 2011.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S.; VALLS, J. Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. Mathematics Education*, New York, v.44, n.6, p.747-759, 2012.

FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S.; VALLS, J. Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, Montana v.10, n.1-2, p.441-468, 2013.

IVARS, P.; FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. Cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La matematica e la sua didattica*, Bologna, v.24, n.1-2, p.79-96, 2016a.

IVARS, P.; FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. *Preservice teachers' learning to notice students' fractional thinking.* The design of a learning environment through a Learning Trajectory. In ERME TOPIC CONFERENCE ETC3. Humbold-Universiät zu Berlin, Oct., 2016b.

LLINARES, S. El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, Parana, n.50, p.117-133, 2013a.

LLINARES, S. Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education*, Lisboa, v.1, n.3, p.76-93, 2013b.

LLINARES, S.; FERNANDEZ, C.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* iSER PUBLICATIONS, v.12, n.8, p.2155-2170, 2016.

MASON, J. Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, New York, n.1, v.3, p.243-267, 1998.

MASON, J. *Researching Your Own Practice.* The Discipline of Noticing. Routledge; London, 2002.

MASON, J. Noticing: Roots and branches. In: M. G. SHERIN; V. R. JACOBS; R. A. PHILIPP (Eds.). *Mathematics teacher noticing:* Seeing through teachers' eyes, (p.35–50). New York: Routledge, 2011.

MASON, J. Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance – a commentary. *ZDM. Mathematics Education*, New York, v.48, n.1, p.219-226, 2016.

PENALVA, M. C.; REY, C.; LLINARES, S. Aprendiendo a interpretar El aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto b-learning. *Educación Matemática*, México, n.25, v.1, p.7-34, 2013.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; FERNANDEZ, C.; LLINARES, S. Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, New York, v.13, p.1305-1329, 2015.

SCHOENFELD, A. Noticing matters. A lot. Now What? In: M. G. SHERIN; V. R. JACOBS; R. A. PHILIPP (Eds.). *Mathematics teacher noticing:* Seeing through teachers' eyes. p.223-238, New York: Routledge, 2011.

SHERIN, M. G.; JACOBS, V. R.; PHILIPP, R. A. (Eds.). *Mathematics teacher noticing*: Seeing through teachers' eyes. New York: Routledge, 2011.

SON, J. W. Preservice teachers' response and feedback type to correct and incorrect student-invented strategies for subtracting whole numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, Dordrecht, n.42, p.49-68, 2016.

WILSON, P. H.; LEE, H. S.; HOLLEBRANDS, K. F. Understanding prospective mathematics teachers' processes for making sense of students' work with technology. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v.41, p.39–64, 2011.

WILSON, P. H.; MOJICA, G. F.; CONFREY, J. Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, Dordrecht, n.32, v.2, p.103-121, 2013.

WILSON, P.H.; SZTAJN, P.; EDGINGTON, C.; CONFREY, J. Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education,* New York, v.17, p.149-175, 2014.